Czy optymalizacja to "maksimum korzyści przy minimum wysiłku"?

Anna Ochal

Katedra Teorii Optymalizacji i Sterowania
Uniwersytet Jagielloński

anna.ochal@uj.edu.pl

Analiza w Tatrach 2025
wykład dla studentów
Małe Ciche, 20.09.2025

Dany jest cel. Wiele dróg prowadzi do tego celu. Zadaniem optymalizacji jest wybór drogi **najkorzystniejszej** ze względu na zadane kryteria.

- Przyroda martwa
  - zasada Fermata
  - equilibrium - położenie równowagi
- Przyroda ożywiona
  - działalność optymalizacyjna człowiek

Rola matematyki:

- precyzyjny model (opis) zjawiska
- gotowe teorie matematyczne (analiza matematyczna, równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, rachunek wariacyjny, optymalne sterowanie (deterministyczne i stochastyczne), metody numeryczne).

Wstęp

Rozwiązać problem minimum oznacza:

- wyznaczyć wartość minimalną,
- wyznaczyć elementy (wektory), w których to minimum jest osiągalne.

Zadania metod optymalizacji:

- istnienie rozwiązań
- liczba rozwiązań
- charakteryzacja rozwiązań optymalnych
  - warunki konieczne
  - warunki wystarczające
- stabilność rozwiązań optymalnych
- numeryczne obliczanie rozwiązań optymalnych

Zadanie programowania - podstawowe sformułowanie

Niech $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.

Zadanie programowania matematycznego (ZP)

Znaleźć $x_0 \in X_0$ takie, że $f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in X_0$,

gdzie $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m\}$.

w skrócie: $\min\limits_{x \in X_0} f(x)$

Terminologia:

f funkcja celu

g_i funkcje ograniczeń

X_0 zbiór rozwiązań dopuszczalnych

x_0 rozwiązanie optymalne

Przykład 1

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Przykład 2 (zagadnienie plecakowe, binarne zagadnienie załadunku)
Które spośród n ładunków "ważących" odpowiednio $a_1, a_2, \dots, a_n$ o wartościach $c_1, c_2, \dots, c_n$ należy załadować na samochód o dopuszczalnej ładowności b tak, aby łączna "wartość" załadowanych ładunków była jak największa?

Przykład 3 (problem komiwojażera)
Komiwojażer startując z miasta 1 ma odwiedzić $n-1$ miast i wrócić do punktu startu. W jakiej kolejności powinien odwiedzić te miasta, aby odwiedzał każde miasto tylko jeden raz i aby przebyta droga była najkrótsza?

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gładka

Znaleźć $x_0 \in [a, b]$ t,że $f(x_0) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

$\iff f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ (VI)

2. $f : \mathbb{R}^n \supset K \to \mathbb{R}$ gładka, K wypukły, domknięty

Znaleźć $x_0 \in K$ t,że $f(x_0) = \min\limits_{x \in K} f(x)$

$\implies \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in K$ (VI)

Podsumowanie

$f \in C^1(K)$, K wypukły, domknięty, $F(x) = \nabla f(x)$

$\exists x_0 \in K\colon\ f(x_0) = \min\limits_{x \in K} f(x) \implies \exists x_0 \in K\colon\ (F(x_0), x - x_0) \geq 0 \quad \forall x \in K.$

$\impliedby$???

$J\colon V \to \mathbb{R}, \quad \dim V = \infty$

$$\min_{v \in V} J(v) \tag{1}$$

Zamieniamy zagadnienie (1) na obliczanie minimum po przestrzeniach V_n skończenie wymiarowych, $V_n \subset V_{n+1} \subset \cdots \subset V$

$$\min_{v \in V_n} J(v) \tag{1_n}$$

Otrzymujemy "przybliżenia Galerkina" $u_n \in V_n$, które przy odpowiednich założeniach są zbieżne do rozwiązania (1).

Przykład

$$J(v) = (Av, v) - 2(f, v)$$

Jeśli A symetryczna, dodatnio określona, wtedy rozwiązać (1) dla takiego J to to samo co rozwiązać równanie $Au = f$.

Uwaga: A może być operatorem różniczkowym.

Metoda Galerkina - zagadnienie brzegowe

$D \subset \mathbb{R}^2$ obszar, $(x, y) \in D$, $u = u(x, y)$

(2) $$-\Delta u = f \text{ w } D$$

(3) $$u_{|\partial D} = 0$$

Zamiast rozwiązywać (2)-(3), można szukać minimum funkcjonału

$$J(u) = \iint_D (u_x)^2 + (u_y)^2 \, dx \, dy - 2 \iint_D f \, u \, dx \, dy$$

i będzie ono rozwiązaniem (2)-(3).

Uwaga: Funkcjonał J jest określony na przestrzeni funkcyjnej nieskończonego wymiaru $\{u \in C^2(D) : u - \text{spełnia } (3)\}$.

Uwaga: **Nie** ze wszystkimi zagadnieniami brzegowymi da się skojarzyć odpowiedni funkcjonał.

Metoda Rayleigha-Ritza

Metoda Rayleigha-Ritza jest metodą wyznaczania ciągu minimalizujacego.

Idea:
aproksymujemy przestrzeń funkcyjną przestrzeniami skończenie wymiarowymi.

$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset V$

$\forall n \quad \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ są liniowo niezależne

Szukamy rozwiązania postaci $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Zadanie poszukiwania ekstremum funkcjonału zastępujemy zagadnieniem ekstremum funkcji wielu zmiennych.

Przykład

Szukamy $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, które spełnia

$$-\left(p(t)x'(t)\right)' + q(t)x(t) = f(t) \quad t \in [0,1]$$

z warunkami brzegowymi $x(0) = x(1) = 0$.

Kojarzymy funkcjonał

$$J(u) = \int_0^1 \{p(t)(u'(t))^2 + q(t)(u(t))^2 - 2f(t)u(t)\}\, dt$$

i szukamy

$$\min_{u \in C_0^2[0,1]} J(u)$$

Sterowanie optymalne

Sterowanie optymalne dotyczy zadań poszukiwania takiego sterowania danym układem, aby odpowiednie kryterium optymalności było osiągnięte.

dynamika zjawiska:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ p.w. } t \in (0, T) \tag{4}$$

$$x(0) = x_0 \tag{5}$$

oznaczenie:

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ stan, $x(t) = x(t; x_0, u(\cdot))$

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ sterowanie, $u \in \mathcal{U}_m$, $\mathcal{T}(t) \subset \mathbb{R}^m$ cel

$\Delta := \{u \in \mathcal{U}_m : \exists t_1\ x(t_1; x_0, u) \in \mathcal{T}(t_1)\}$ zbiór sterowań dopuszczalnych

$J\colon \Delta \to \mathbb{R}$ funkcjonał kosztu/ wypłaty

zadanie sterowania optymalnego

Znaleźć $u_* \in \Delta :\quad J(u_*) \leq J(u) \quad \forall u \in \Delta.$

Przykłady funkcjonału kosztu

$$J(x,u) = w_1|x(t_1) - x_d|^2 + w_2 \int_0^{t_1} |\mathcal{O}x(t) - z_d|^2\, dt + w_3 \int_0^{t_1} (\mathcal{R}u(t), u(t))\, dt,$$

gdzie: $w_i \geq 0$ wagi, $\mathcal{O}$ operator obserwacji, $\mathcal{R}$ operator, x_d, z_d oczekiwane wyniki.

Dla zadanych funkcji L, g rozważamy:

(B) $$J(u) = \int_0^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt + g(x(t_1))$$

(L) $$J(u) = \int_0^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt$$

(M) $$J(u) = g(x(t_1))$$

bieżący koszt: $\displaystyle\int_0^{t_1} L(t, x(t), u(t))\, dt$, końcowy koszt: $g(x(t_1))$.

Podstawowe zadanie rachunku różniczkowego

Dane: $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gładka
$T > 0,\ x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ ustalone

Spośród funkcji $x\colon\ [0, T] \to \mathbb{R}^n$, spełniających warunki

$$x(0) = x_0, x(T) = x_1,$$

znaleźć krzywą $x_*\colon\ [0, T] \to \mathbb{R}^n$, która minimalizuje funkcjonał

$$J(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t))\, dt \longrightarrow \inf$$

Zagadnienie brachistochrony (krzywej najkrótszego spadku)

Cząstka porusza się wzdłuż krzywej, bez tarcia, pod wpływem jednorodnego pola grawitacyjnego. pomiędzy dwoma punktami. Wyznaczyć kształt tej krzywej, aby cząstka pokonała drogę w możliwie najkrótszym czasie.

Podstawowe zadanie rachunku różniczkowego

Zagadnienie brachistochrony (krzywej najkrótszego spadku)

Cząstka porusza się wzdłuż krzywej, bez tarcia, pod wpływem jednorodnego pola grawitacyjnego, pomiędzy dwoma punktami. Wyznaczyć kształt tej krzywej tak, aby cząstka pokonała drogę w możliwie najkrótszym czasie.

Termin i zagadnienie brachistochrony zostały wprowadzone w 1696r. przez Johanna Bernoulliego.

Znaleźć $y(x)$, przy danych $y(0)$, $y(1)$, która minimalizuje funkcjonał

$$J(y(x)) = \int_0^1 \frac{ds}{v} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx.$$

Zagadnienie znalezienia krzywej najszybszego spadku został rozwiązany niezależnie przez Leibniza, Newtona, Johanna Bernoulliego i de l'Hospitala.